Hoofdstuk 7: Discrete dynamische modellen.

7.1 Recursieve formules

Opgave 1:

a. $10000 \cdot 1{,}04 - 500 = 9900$

b. $9900 \cdot 1{,}04 - 500 = 9796$

c.

datum	1-1-2006	1-1-2007	1-1-2008	1-1-2009	1-1-2010
restschuld	10000	9900	9796	9687,84	9575,35

Opgave 2:

a. $u_6 = 340{,}57$

$u_7 = 356{,}51$

b. $u_{10} 395{,}4$

$u_{11} = 405{,}9$ dus vanaf de 12^e^ term

Opgave 3:

a. $u_3 = 330{,}07$

$u_4 = 373{,}35$

b. $u_{11} = 419{,}44$

$u_{12} = 419{,}60$ dus vanaf de 13^e^ term

c. nee, voor grote waarden van n geldt $u_n \approx 419{,}76$

Opgave 4:

a. $u_6 = 30{,}79$

$u_7 = 31{,}76$

b. $u_{10} = 34{,}67$

$u_{11} = 35{,}64$ dus vanaf de 12^e^ term

c. $u_{15} - u_{14} = 0{,}9747$

$u_{16} - u_{15} = 0{,}9753$ dus vanaf $n = 16$

Opgave 5:

a. $u_n = u_{n-1} + 10$ met $u_0 = 100$

b. $u_n = u_{n-1} - 20$ met $u_0 = 200$

c. $u_n = 1{,}2 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 1000$

d. $u_n = 0{,}6 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 2000$

Opgave 6:

a. $u_{10} = 70$

$u_{11} = -3$ dus 11 positieve termen

b. $u_{16} = 10{,}263$

$u_{17} = 7{,}697$ dus 17 termen zijn groter dan 10

Opgave 7:

a. 55 , de volgende term krijg je door de voorgaande twee termen op te tellen.

b. je gebruikt bij ANS de voorgaande term en hier heb je voorgaande twee termen nodig.

Opgave 8:

a. voer in:

$nMin = 0$

$u(n) = 0{,}5 \cdot u(n-1) + n^2$

$u(nMin) = 100$

In de tabel zie je dat u_3 de kleinste term is, dus de 4^e^ term.

b. $u_7 = 76{,}73$

c. $u_{16} = 454$

$u_{17} = 516$ dus vanaf de 18^e^ term

Opgave 9:

a. voer in:

$nMin = 0$

$u(n) = 2 \cdot u(n-1) + u(n-2)$

$u(nMin) = \{3, 2\}$

$u_0 = 2$, $u_1 = 3$, $u_2 = 8$, $u_3 = 19$, $u_4 = 46$, $u_5 = 111$

b. $u_{15} = 746639$

$u_{16} = 1802546$ dus vanaf de 17^e^ term

Opgave 10:

a. voer in:

$nMin = 0$

$u(n) = u(n-1) + 5n$

$u(nMin) = 100$

$v(n) = v(n-1) + n^2$

$v(nMin) = 10$

kijk in de tabel:

$u_9 = 325$ $v_9 = 295$

$u_{10} = 375$ $v_{10} = 395$ dus vanaf $n = 10$

b. $v_{17} = 1795$ $U_{17} = 865$

$v_{18} = 2119$ $u_{18} = 955$ dus vanaf $n = 18$

c. $u_{24} = 1600$

Opgave 11:

a. $u_n = 1{,}04 \cdot u_{n-1} - 100$

b. voer in:

$nMin = 0$

$u(n) = 1{,}04 \cdot u(n-1) - 100$

$u(nMin) = 1000$

$u_{13} = 2{,}39$

$u_{14} = -97{,}51$ dus voor $n = 13$
$n = 0$ is 1 januari 2007
$n = 14$ is 1 januari 2021

Opgave 12:

a. $H_n = 1{,}08 \cdot H_{n-1} - 30$ met $H_0 = 275$

b. voer in:
$nMin = 0$
$u(n) = 1{,}08 \cdot u(n-1) - 30$
$u(nMin) = 275$
$u_{10} = 159$
$u_{11} = 142$ dus voor $n = 11$, dus 1 juli 2019

c. $0{,}08 \cdot 275 = 22$ dus 22 stuks

Opgave 13:

a. $B_n = 1{,}035 \cdot B_{n-1} - 500$ met $B_0 = 17500$

b. $B_8 = 18518{,}31$

c. $B_{16} = 19859{,}24$
$B_{17} = 20054{,}31$ dus voor $n = 17$, dus 1 januari 2014

d. $0{,}035 \cdot 17500 = 612{,}5$ dus € $612{,}50$.

Opgave 14:

a. $R_n = 1{,}04 \cdot R_{n-1} - 1000$

b. $R_{10} = 2796{,}34$

c. $R_{13} = 23{,}90$
$R_{14} = -975{,}15$ dus in 2020
$13 \cdot 1000 + 23{,}9 \cdot 1{,}04 = 13024{,}86$

7.2 Directe formules

Opgave 15:

a. $u_0 = 20$, $u_1 = 26$, $u_2 = 32$, $u_3 = 38$, $u_4 = 44$, $u_5 = 50$

b. $a = 20$ $b = 6$

c. $u_{25} = 20 + 6 \cdot 25 = 170$

Opgave 16:

a. het verschil tussen twee opeenvolgende termen is 5

b. recursieve formule: $u_n = u_{n-1} + 5$ met $u_0 = 13$

directe formule: $u_n = 13 + 5n$

c. $u_{49} = 13 + 5 \cdot 49 = 258$

d. $13 + 5n = 633$

$5n = 620$

$n = 124$ dus de 125e term

Opgave 17:

a. $u_n = 1023 - 7n$

$1023 - 7n = 246$

$-7n = -777$

$n = 111$ dus de 112e term

b. $1023 - 7n = 0$

$-7n = -1023$

$n = 146{,}1$ dus u_{146} is nog positief

dus 147 termen zijn positief

Opgave 18:

a. $2\times$ de gevraagde som is $100 \cdot 101$

dus de gevraagde som is $\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101$

b. $1 + 2 + 3 + ... + 50 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 = 1275$

Opgave 19:

a. $\sum_{k=0}^{50} (3k + 4) = \frac{1}{2} \cdot 51 \cdot (4 + 154) = 4029$

b. $\sum_{k=0}^{40} (100 - 2k) = \frac{1}{2} \cdot 41 \cdot (100 + 20) = 2460$

c. $\sum_{k=5}^{30} (6k - 12) = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot (18 + 168) = 2418$

d. $\sum_{k=12}^{36} (150 - 3k) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (114 + 42) = 1950$

Opgave 20:

a. $u_n = 12 + 4n$

$12 + 4n = 152$

$4n = 140$

$n = 35$

$12 + 16 + 20 + 24 + ... + 152 = \sum_{n=0}^{35}(12 + 4n) = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot (12 + 152) = 2952$

b. $u_n = 100 - 3n$

$u_{33} = 1$

$100 + 97 + 94 + 91 + ... + 1 = \sum_{n=0}^{33}(100 - 3n) = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot (100 + 1) = 1717$

c. $u_n = 18 + 7n$

$u_{24} = 186$

$\sum_{n=0}^{24}(18 + 7n) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (18 + 186) = 2550$

Opgave 21:

a. $u_n = 30{,}62 + 0{,}15n$

$\sum_{n=0}^{24}(30{,}62 + 0{,}15n) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (30{,}62 + 34{,}22) = 810{,}5 \text{ sec} = 13 \text{ min } 30{,}5 \text{ sec}$

b. $u_n = 35{,}76 - 0{,}22n$

$\sum_{n=0}^{24}(35{,}76 - 0{,}22n) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (35{,}76 + 30{,}48) = 828 \text{ sec} = 13 \text{ min } 48 \text{ sec}$

Opgave 22:

a. $u_n = 20 + n \cdot v$

$u_{29} = 20 + 29v$

$\sum_{n=0}^{29}(20 + n \cdot v) = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (20 + 20 + 29v) = 15(40 + 29v) = 2340$

b. $600 + 435v = 2340$

$435v = 1740$

$v = 4$

c. $\sum_{n=0}^{49}(20 + 4n) = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot (20 + 216) = 5900$

Opgave 23:

$u_n = 4 + n \cdot v$

$u_{11} = 4 + 11v$

$\sum_{n=0}^{11}(4 + n \cdot v) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (4 + 4 + 11v) = 6 \cdot (8 + 11v) = 147$

$48 + 66v = 147$

$66v = 99$

$v = 1\frac{1}{2}$

$\sum_{n=0}^{7}(4 + 1\frac{1}{2}n) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (4 + 14{,}5) = 74 \text{ m}$

Opgave 24:

a. $u_n = 4{,}9 + 9{,}8n$

$$\sum_{n=0}^{5}(4{,}9+9{,}8n) = \tfrac{1}{2}\cdot 6\cdot(4{,}9+53{,}9) = 176{,}4 \text{ m}$$

b. $$S_n = \sum_{n=0}^{n}(4{,}9+9{,}8n) = \tfrac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot(4{,}9+4{,}9+9{,}8n) = \tfrac{1}{2}(n+1)(9{,}8+9{,}8n) =$$
$$\tfrac{1}{2}(9{,}8n+9{,}8n^2+9{,}8+9{,}8n) = \tfrac{1}{2}(9{,}8n^2+19{,}6n+9{,}8) = 4{,}9n^2+9{,}8n+4{,}9$$

c. $4{,}9n^2 + 9{,}8n + 4{,}9 = 1960$

neem $y_1 = 4{,}9x^2 + 9{,}8x + 4{,}9$ en $y_2 = 1960$

intersect geeft $x = 19$ dus $S_{19} = 1960$

dus na 20 seconden

Opgave 25:

a. $u_0 = 400$, $u_1 = 600$, $u_2 = 900$, $u_3 = 1350$, $u_4 = 2025$

b. $a = 400 \quad b = 1{,}5$

Opgave 26:

a. iedere volgende term vind je door de voorgaande term te vermenigvuldigen met 1,2

b. recursieve formule: $u_n = 1{,}2\cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 1250$

directe formule: $u_n = 1250\cdot 1{,}2^n$

c. voer in:

$nMin = 0$

$u(n) = 1250\cdot 1{,}2^n$

$u(nMin) = 1250$

kijk in de tabel, dan geldt: $u_{13} = 13374$ en $u_{14} = 16049$, dus vanaf de 15e term

Opgave 27:

$u_3\cdot r^7 = u_{10}$

$54\cdot r^7 = 118098$

$r^7 = 2187$

$r = \sqrt[7]{2187} = 3$

$$u_0 = \frac{u_3}{r^3} = \frac{54}{3^3} = 2$$

$u_n = 2\cdot 3^n$

Opgave 28:

a. $u_3 + 5v = u_8$

$16 + 5v = 16384$

$5v = 16368$

$v = 3273{,}6$

$u_0 = u_3 - 3v = 16 - 3\cdot 3273{,}6 = -9804{,}8$

$u_n = -9804{,}8 + 3273{,}6n$

b. $u_3 \cdot r^5 = u_8$

$16 \cdot r^5 = 16384$

$r^5 = 1024$

$r = \sqrt[5]{1024} = 4$

$u_0 = \frac{u_3}{r^3} = \frac{16}{4^3} = 0{,}25$

$u_n = 0{,}25 \cdot 4^n$

Opgave 29:

Bij een meetkundige rij hoort exponentiële groei.
Bij een rekenkundige rij hoort lineaire groei.

Opgave 30:

a. $PQ = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$

$AB \cdot r = PQ$

$r = \frac{PQ}{AB} = \frac{\sqrt{80}}{12}$

b. $u_n = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{80}}{12}\right)^n$

c. $u_8 = 1{,}14$

$u_9 = 0{,}85$ dus vanaf het 10^e vierkant

d. iedere zijde wordt $k = \frac{\sqrt{80}}{12} \times$zo groot

dus de oppervlakte wordt $k^2 = \left(\frac{\sqrt{80}}{12}\right)^2 = \frac{5}{9} \times$zo groot

$v_0 = 12^2 = 144$

$v_n = 144 \cdot (\frac{5}{9})^n$

e. $v_{16} = 0{,}0119$ cm² = 1,19mm²

$v_{17} = 0{,}0066$ cm² = 0,66mm² , dus vanaf het 18^e vierkant

Opgave 31:

$-2 \cdot S_{10} = 15 - 2657205$

$-2 \cdot S_{10} = -2657190$

$S_{10} = 1328595$

Opgave 32:

a. $\sum_{n=0}^{11} (0{,}001 \cdot 2^n = \frac{u_0 - u_{12}}{1-r} = \frac{0{,}001 - 0{,}001 \cdot 2^{12}}{1-2} = 4{,}095$

b. $\sum_{k=0}^{20} 100 \cdot 0{,}8^k = \frac{u_0 - u_{21}}{1-r} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8^{21}}{1-0{,}8} = 495{,}39$

c. $\sum_{k=5}^{18} 200 \cdot 1{,}1^k = \frac{u_5 - u_{19}}{1-r} = \frac{200 \cdot 1{,}1^5 - 200 \cdot 1{,}1^{19}}{1-1{,}1} = 9011$

d. $u_n = 600 \cdot 0{,}75^n$

$$S_{14} = \frac{u_0 - u_{15}}{1-r} = \frac{600 - 600 \cdot 0,75^{15}}{1-0,75} = 2367,9$$

Opgave 33:

a. mr met $u_0 = 2000$ en $r = 1,5$

$$2000 + 3000 + 4500 + ... + 34171,875 = \frac{2000 - 1,5 \cdot 34171,875}{1-1,5} = 98515,625$$

b. $1,06 + 1,06^2 + 1,06^3 + ... + 1,06^{12} = \frac{1,06 - 1,06^{13}}{1-1,06} = 17,882$

c. $1 + 1,5 + 1,5^2 + 1,5^3 + ... + 1,5^{20} = \frac{1 - 1,5^{21}}{1-1,5} = 9973,770$

d. $1,2 - 1,2^2 + 1,2^3 - 1,2^4 + ... - 1,2^{24} = \frac{1,2 - (-1,2 \cdot -1,2^{24})}{1 - -1,2} = -42,816$

Opgave 34:

a. $u_n = 20 \cdot 1,1^n$

b. $u_7 = 38,974$

$u_8 = 42,872$ dus bij de 9e duurloop

$$S_8 = \frac{u_0 - u_9}{1-r} = \frac{20 - 20 \cdot 1,1^9}{1-1,1} = 271,6 \text{ km}$$

Opgave 35:

$u_n = 11,3 \cdot 1,074^n$

$$S_{12} = \frac{u_0 - u_{13}}{1-r} = \frac{11,3 - 11,3 \cdot 1,074^{13}}{1-1,074} = 233,6 \text{ miljard dollar}$$

Opgave 36:

a. toename: $T_n = 5,2 \cdot 0,8^n$

$T_7 = 5,2 \cdot 0,8^7 = 1,1 \text{ cm} = 11 \text{mm}$

b. $S_7 = \frac{T_0 - T_8}{1-r} = \frac{5,2 - 5,2 \cdot 0,8^8}{1-0,8} = 21,6 \text{ cm} = 216 \text{mm}$

c. $S_9 = \frac{T_0 - T_{10}}{1-r} = \frac{5,2 - 5,2 \cdot 0,8^{10}}{1-0,8} = 23,2 \text{ cm}$

dus $18 + 23,2 = 41,2 \text{ cm} = 412 \text{mm}$

Opgave 37:

a. u_n is een rekenkundige rij met $u_0 = 100$ en $v = 15$

dus $u_n = 100 + 15n$

$S_n = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (u_0 + u_n) = \frac{1}{2}(n+1)(100 + 100 + 15n) = \frac{1}{2}(n+1)(200 + 15n)$

v_n is een meetkundige rij met $u_0 = 10$ en $r = 1,5$

dus $v_n = 10 \cdot 1,5^n$

$$T_n = \frac{v_0 - v_{n+1}}{1-r} = \frac{10 - 10 \cdot 1{,}5^{n+1}}{1-1{,}5} = \frac{10-10 \cdot 1{,}5^{n+1}}{-0{,}5} = -20 + 20 \cdot 1{,}5^{n+1}$$

b. $S_{10} = 1925 \quad T_{10} = 1710$

$S_{11} = 2190 \quad T_{11} = 2574{,}9$ dus vanaf $n = 11$

7.3 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde

Opgave 38:

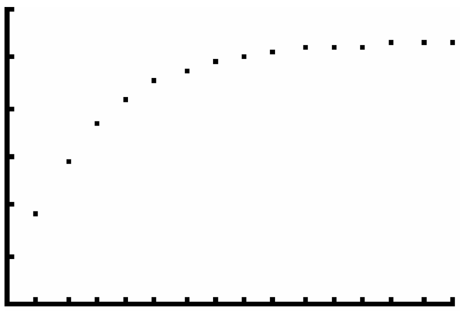
$K_n = 1{,}038 \cdot K_{n-1} - 150$ met $K_0 = 5000$

en $K_n - K_{n-1} = 0{,}038 \cdot K_{n-1} - 150$ met $K_0 = 5000$

Opgave 39:

a. wel
b. niet
c. wel
d. niet
e. wel
f. wel

Opgave 40:

a. 

grenswaarde $= 26\tfrac{2}{3}$

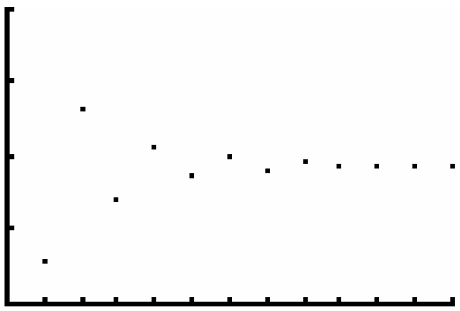
b. nee

Opgave 41:

a. $b = 2$ geeft grenswaarde $= 5$
$b = 20$ geeft grenswaarde $= 50$
$b = 5$ geeft grenswaarde $= 12{,}5$

b. bij $b = 2$ is de grafiek dalend
bij $b = 5$ en $b = 20$ krijg je een stijgende grafiek

Opgave 42:

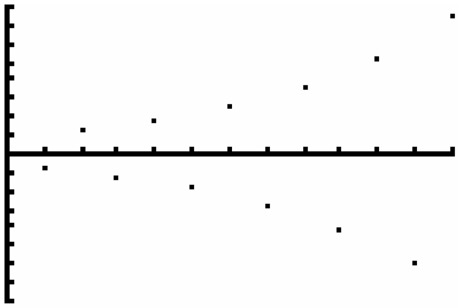
a. 

grenswaarde $= 9{,}375$

b. de stippen van de grafiek liggen om en om onder en boven de grenswaarde.

Opgave 43:

a.



geen grenswaarde

b. de termen zijn afwisselend positief en negatief, de positieve termen worden steeds groter en de negatieve termen worden steeds kleiner.

Opgave 44:

a.

$u_0 = 2$	$u_1 = 4$	$u_2 = 7$	$u_3 = 11{,}5$	$u_4 = 18{,}25$
$u_1 = 4$	$u_2 = 7$	$u_3 = 11{,}5$	$u_4 = 18{,}25$	$u_5 = 28{,}375$

b. $(7;11{,}5)$ $(11{,}5;18{,}25)$

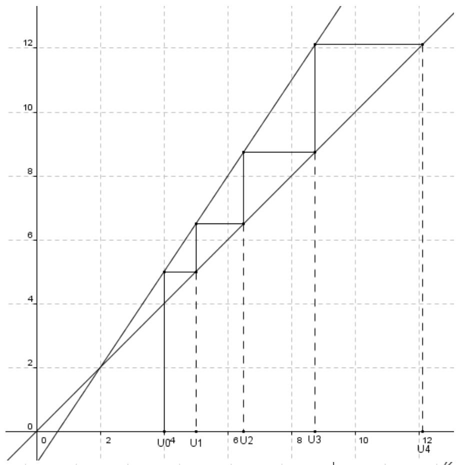
c. $y = 1{,}5x + 1$

d. $u_n = y$ $u_{n-1} = x$

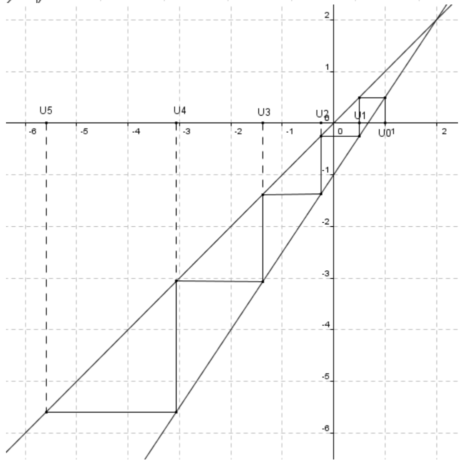
e. ja, ja

Opgave 45:

a.



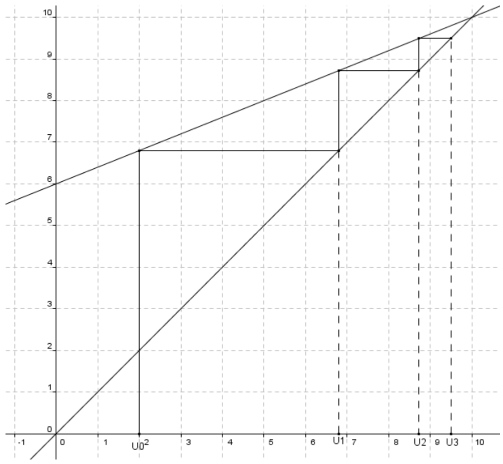
b.



c. de webgrafiek komt meteen in het snijpunt van $y = 1{,}5x - 1$ en $y = x$, dus de rij u_n is een constante rij, namelijk de rij $u_n = 2$

Opgave 46:

a.



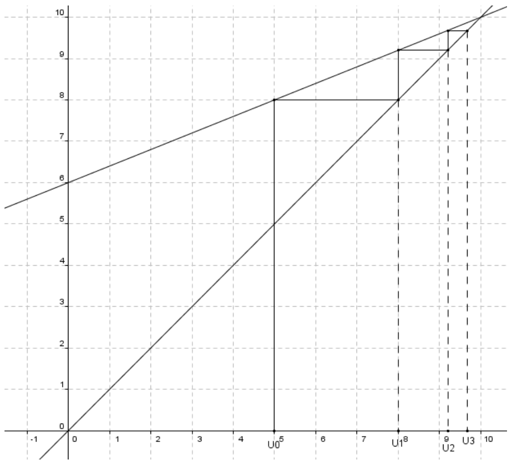
b. de grafiek loopt stapsgewijs omhoog naar het snijpunt

c. $x = 0{,}4x + 6$

$0{,}6x = 6$

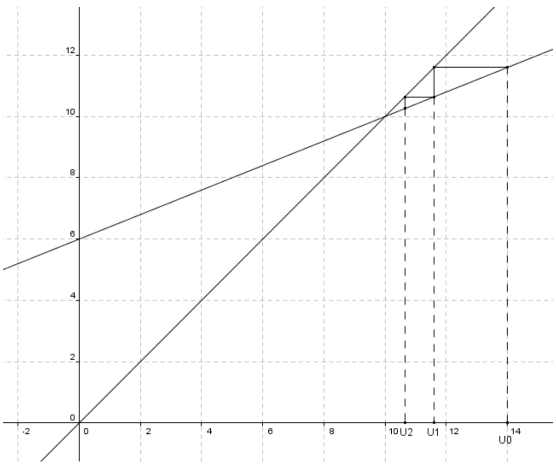
$x = 10$

d.



ja, de grenswaarde $= 10$

e.

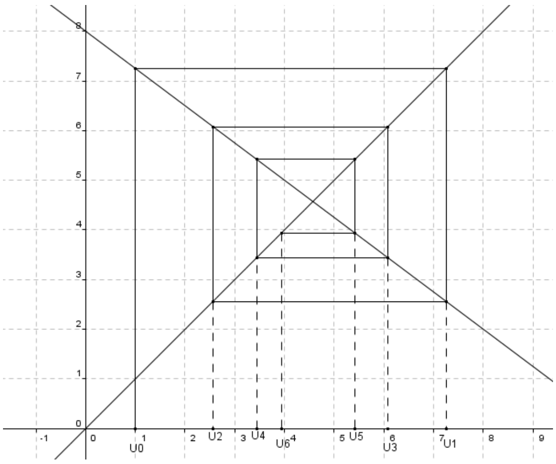


f. de grenswaarde is het snijpunt van de lijnen $y = 0{,}4x + 6$ en $y = x$, de startwaarde heeft geen invloed op dit snijpunt.

Opgave 47:

a. $u_n = -0{,}75u_{n-1} + 8$ met $u_0 = 1$

b.



c. $x = -0{,}75x + 8$

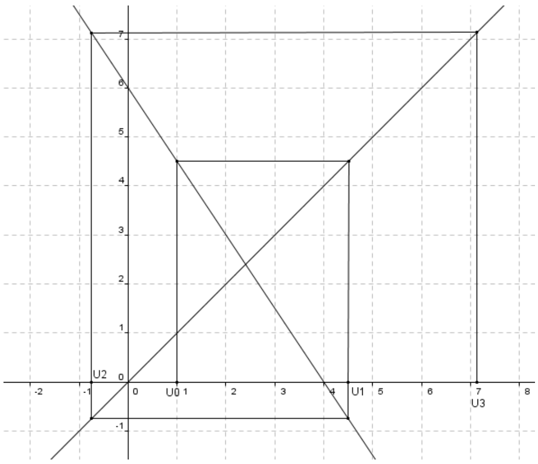
$1{,}75x = 8$

$x = 4\frac{4}{7}$ dus de grenswaarde $= 4\frac{4}{7}$

Opgave 48:

a. $u_n = -1{,}5u_{n-1} + 6$ met $u_0 = 1$

b.

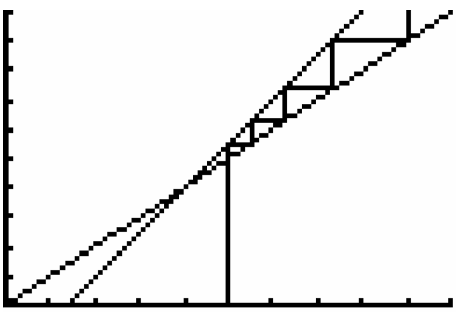


c. nee, er is geen grenswaarde

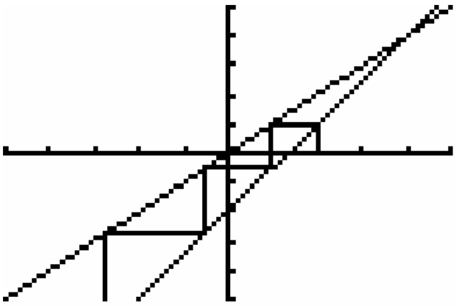
d. als $u_0 = 2{,}4$ dan is u_n een constante rij, namelijk $u_n = 2{,}4$

Opgave 49:

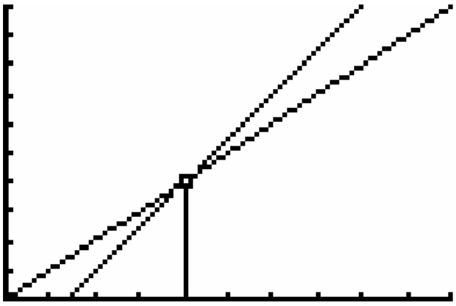
a.



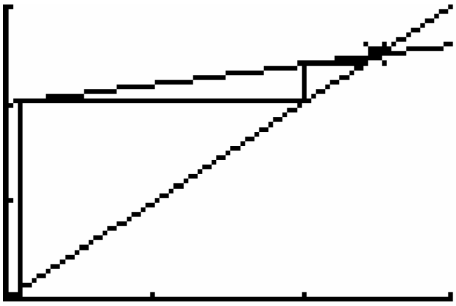
geen convergentie

b. 

geen convergentie

c. 

u_n is een constante rij, dus wel convergentie
grenswaarde $= 4$

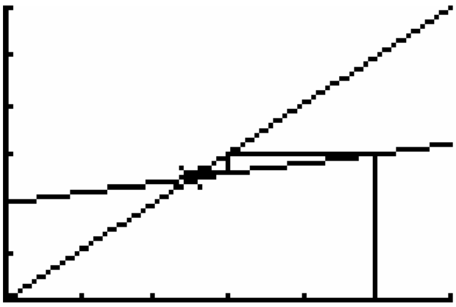
d. 

wel convergentie

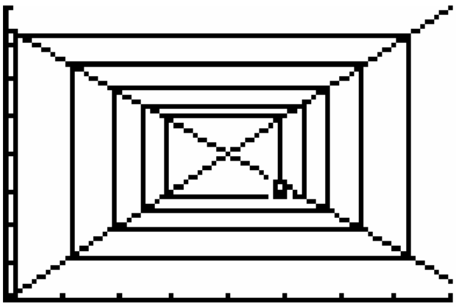
$x = 0{,}2x + 200$

$0{,}8x = 200$

$x = 250$ dus grenswaarde $= 250$

e. 

wel convergentie
grenswaarde $= 250$

f. 

wel convergentie

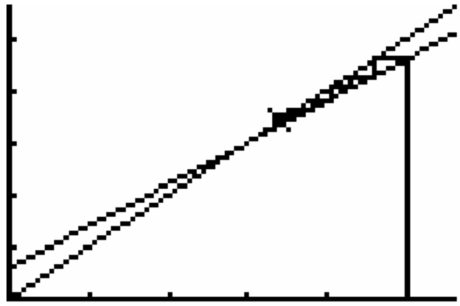
$x = -0{,}86x + 744$

$1{,}86x = 744$

$x = 400$ dus grenswaarde $= 400$

Opgave 50:

a. $A_n = 0{,}8A_{n-1} + 300$ met $A_0 = 2500$



b. wel convergentie

c. $x = 0{,}8x + 300$

$0{,}2x = 300$

$x = 1500$

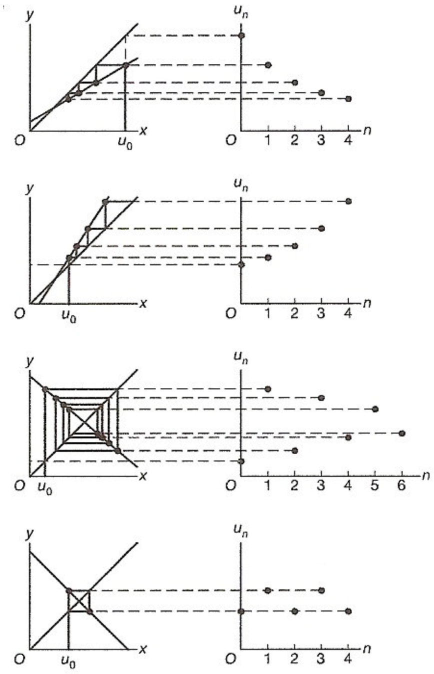
grenswaarde $= 1500$

Opgave 51:

a. je kunt in de webgrafiek bij elke *n* de waarde van u_n aflezen op de lijn $y = ax + b$

In de tijdgrafiek zijn deze punten (n, u_n) ook getekend.

b.



Opgave 52:

a. bij een rekenkundige rij is het verschil tussen twee opeenvolgende termen constant

$a = 1$ en *b* kan elke waarde aannemen

b. bij een meetkundige rij is het quotiënt van twee opeenvolgende termen constant

$b = 0$ en $a \neq 0$

Opgave 53:

a. $u_n = 1{,}05 \cdot u_{n-1} + 500$ met $u_0 = 750$

b. $u_3 = 1{,}05 \cdot u_2 + 500 = 1{,}05 \cdot (1{,}05^2 \cdot 750 + 1{,}05 \cdot 500 + 500) + 500 =$

$= 1{,}05^3 \cdot 750 + 1{,}05^2 \cdot 500 + 1{,}05 \cdot 500 + 500$

c. $u_6 = 1{,}05^6 \cdot 750 + 1{,}05^5 \cdot 500 + 1{,}05^4 \cdot 500 + 1{,}05^3 \cdot 500 + 1{,}05^2 \cdot 500 + 1{,}05 \cdot 500 + 500$

d. factor: $r = 1{,}05$

beginterm: 500

Opgave 54:

a. $u_n = 1{,}5 \cdot u_{n-1} - 5$ met $u_0 = 30$

$$\bar{u} = \frac{b}{1-a} = \frac{-5}{1-1{,}5} = \frac{-5}{-0{,}5} = 10$$

$$u_n = \bar{u} + a^n \cdot (u_0 - \bar{u}) = 10 + 1{,}5^n \cdot (30-10) = 10 + 20 \cdot 1{,}5^n$$

b. $x_n = 0{,}75 \cdot x_{n-1} + 20$ met $x_0 = 100$

$$\bar{x} = \frac{b}{1-a} = \frac{20}{1-0{,}75} = 80$$

$$x_n = \bar{x} + a^n \cdot (x_0 - \bar{x}) = 80 + 0{,}75^n \cdot (100-80) = 80 + 20 \cdot 0{,}75^n$$

c. $K_n = , \cdot K_{n-1} - 200$ met $K_0 = 1000$

$$\bar{K} = \frac{b}{1-a} = \frac{-200}{1-0{,}05} = 4000$$

$$K_n = \bar{K} + a^n \cdot (K_0 - \bar{K}) = 4000 + 1{,}05^n \cdot (1000-4000) = 4000 - 3000 \cdot 1{,}05^n$$

Opgave 55:

a. $K_n = 1{,}04 \cdot K_{n-1} - 150$ met $K_0 = 800$

b. $\bar{K} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-150}{1-1{,}04} = 3750$

$$K_n = \bar{K} + a^n \cdot (K_0 - \bar{K}) = 3750 + 1{,}04^n \cdot (800-3750) = 3750 - 2950 \cdot 1{,}04^n$$

c. $K_6 = 17{,}31$

$K_7 = -132$ dus 1 januari 2013

$1{,}04 \cdot 17{,}31 = 18{,}00$

Opgave 56:

a. $A_n = 0{,}75 \cdot A_{n-1} + 50$ met $A_0 = 100$

b. $\bar{A} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{50}{1-0{,}75} = 200$

$$A_n = \bar{A} + a^n \cdot (A_0 - \bar{A}) = 200 + 0{,}75^n \cdot (100-200) = 200 - 100 \cdot 0{,}75^n$$

c. $A_8 = 190\,\text{mg}$

d. ja, de grenswaarde $= 200$

Opgave 57:

a. 7.00 uur: $P_0 = 10000$

7.30 uur: $P_1 = 10000 + 0{,}4 \cdot 30000 = 22000$

8.00 uur: $P_2 = 22000 + 0{,}4 \cdot 18000 = 29200$

b. $P_n = P_{n-1} + 0{,}4 \cdot (40000 - P_{n-1})$

$= P_{n-1} + 16000 - 0{,}4 \cdot P_{n-1}$

$= 0{,}6 \cdot P_{n-1} + 16000$ met $P_0 = 10000$

c. $\bar{P} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{16000}{1-0{,}6} = 40000$

$$P_n = \bar{P} + a^n \cdot (P_0 - \bar{P}) = 40000 + 0{,}6^n \cdot (10000-40000) = 40000 - 30000 \cdot 0{,}6^n$$

d. $P_6 = 38600$

$P_7 = 39160$ dus vanaf $n = 7$

Opgave 58:

a. $L_0 = 150$

$L_1 = 150 + 0{,}2 \cdot 650 = 280$

$L_2 = 280 + 0{,}2 \cdot 520 = 384$

b. $L_n = L_{n-1} + 0{,}2 \cdot (800 - L_{n-1})$

$= L_{n-1} + 160 - 0{,}2 \cdot L_{n-1}$

$= 0{,}8 \cdot L_{n-1} + 160$ met $L_0 = 150$

c. $\overline{L} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{160}{1-0{,}8} = 800$

$L_n = \overline{L} + a^n \cdot (L_0 - \overline{L}) = 800 + 0{,}8^n \cdot (150 - 800) = 800 - 650 \cdot 0{,}8^n$

d. 90% van 800 is 720

$L_9 = 712$

$L_{10} = 730$

dus 11 dagen

7.4 Stelsels differentievergelijkingen.

Opgave 59:

a. De hazenpopulatie zal toenemen omdat er weinig lynxen zijn die op de hazen jagen.
De lynxenpopulatie zal toenemen omdat er veel hazen zijn die als voedsel dienen.

b. De hazenpopulatie zal afnemen en de lynxenpopulatie zal afnemen.

c. Uitgaande van weinig lynxen en weinig hazen krijg je:
toename aantal hazen → toename aantal lynxen → afname aantal hazen → afname aantal lynxen → toename aantal hazen → etc.

d. Bij beide populaties is de periode 8 jaar.

e. op $t = 1$ geldt: $H = 10000$ en $L = 4600$

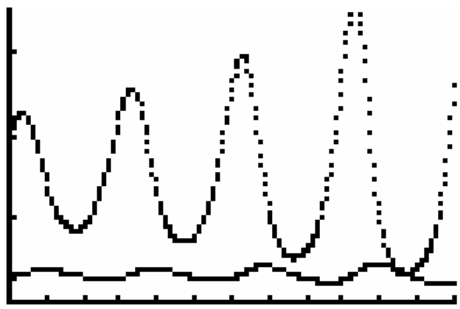
f. het hoogste punt in de hazengrafiek geeft het meest rechtse punt in het prooi-roofdier-diagram
het laagste punt in de hazengrafiek geeft het meest linkse punt in het prooi-roofdier-diagram
het laagste punt in de lynxengrafiek geeft het laagste punt in het prooi-roofdier-diagram

Opgave 60:

a. op $t = 1$ zijn er 1025 prooidieren en 152 roofdieren
op $t = 5$ zijn er 1104 prooidieren en 159 roofdieren

b. kijk in de tabel of in de time-grafiek, na 25 maanden zijn er 196 roofdieren

c. de populatie prooidieren bereikt 4 maal een maximum (zie grafiek)



Opgave 61:

De groeivoet van de prooidieren is 0,15 dus $P_t = 1{,}15P_{t-1} - 0{,}0015R_{t-1} \cdot P_{t-1}$

a. op $t = 5$ zijn er 666 prooidieren en 153 roofdieren
op $t = 15$ zijn er 317 prooidieren en 137 roofdieren

b. uit de grafiek blijkt dat P_t maximaal is voor $n = 190$, er zijn dan 2501 prooidieren

c. $P_t = 1{,}12P_{t-1} - 0{,}0015R_{t-1} \cdot P_{t-1}$
plot de tijdgrafieken van b en c
de eerste bewering is niet waar, het maximale aantal prooidieren neemt toe.
de tweede bewering is niet waar, het aantal prooidieren is voor de tweede keermaximaal als $n = 230$.

d. $R_t = 0{,}95R_{t-1} + 0{,}00004P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
de bewering is niet waar, in de tijdgrafiek zie je dat het maximale aantal roofdieren toeneemt

Opgave 62:

a. $(0{,}25 - 0{,}0015\overline{R}) \cdot \overline{P} = 0$

$0{,}25 - 0{,}0015\overline{R} = 0$

$-0{,}0015\overline{R} = -0{,}25$

$\overline{R} = 166\tfrac{2}{3} = 167$

$(-0{,}03 + 0{,}00004\overline{P}) \cdot \overline{R} = 0$

$-0{,}03+0{,}00004\overline{P}=0$

$0{,}00004\overline{P}=0{,}03$

$\overline{P}=750$

b. de aantallen van de populaties veranderen niet meer, dus $P=750$ en $R=166\frac{2}{3}$

Opgave 63:

a. $P_t=1{,}15P_{t-1}-0{,}006R_{t-1}\cdot P_{t-1}$

$P_t=P_{t-1}+0{,}15P_{t-1}-0{,}006R_{t-1}\cdot P_{t-1}$

$P_t=P_{t-1}+(0{,}15-0{,}006R_{t-1})\cdot P_{t-1}$

in de evenwichtssituatie geldt:

$(0{,}15-0{,}006\overline{R})\cdot\overline{P}=0$

$0{,}15-0{,}006\overline{R}=0$

$-0{,}006\overline{R}=-0{,}15$

$\overline{R}=25$

$R_t=0{,}94R_{t-1}+0{,}00006P_{t-1}\cdot R_{t-1}$

$R_t=R_{t-1}-0{,}06R_{t-1}+0{,}00006P_{t-1}\cdot R_{t-1}$

$R_t=R_{t-1}+(-0{,}06+0{,}00006P_{t-1})\cdot R_{t-1}$

in de evenwichtssituatie geldt:

$(-0{,}06+0{,}00006\overline{P})\cdot\overline{R}=0$

$-0{,}06+0{,}00006\overline{P}=0$

$0{,}00006\overline{P}=0{,}06$

$\overline{P}=1000$

b. $P_t=P_{t-1}+(0{,}25-0{,}006R_{t-1})\cdot P_{t-1}$

in de evenwichtssituatie geldt:

$0{,}25-0{,}006\overline{R}=0$

$-0{,}006\overline{R}=-0{,}25$

$\overline{R}=41\frac{2}{3}$

$\overline{P}=1000$

dus als de natuurlijke sterfte van de roofdieren toeneemt, blijft $\overline{R}$ gelijk en neemt $\overline{P}$ toe

c. stel de natuurlijke sterfte van de roofdieren neemt toe, waardoor de groeivoet $-0{,}08$ wordt

$R_t=R_{t-1}+(-0{,}08+0{,}00006P_{t-1})\cdot R_{t-1}$

in de evenwichtssituatie geldt:

$-0{,}08+0{,}00006\overline{P}=0$

$0{,}00006\overline{P}=0{,}08$

$0{,}00006\overline{P}=0{,}08$

$\overline{P}=1333\frac{1}{3}$

dus $\overline{P}$ wordt groter, namelijk $\overline{P}=1333\frac{1}{3}$ en $\overline{R}$ blijft gelijk

dus als de natuurlijke sterfte van de roofdieren toeneemt, blijft $\overline{R}$ gelijk maar $\overline{P}$ neemt toe

Opgave 64:

a. $P_1 = 1{,}38P_0 + a \cdot P_0 \cdot R_0$
$539 = 1{,}38 \cdot 550 + a \cdot 550 \cdot 200$
$539 = 759 + 110000a$
$-110000a = 220$
$a = -0{,}002$
$R_1 = 0{,}90R_0 + b \cdot P_0 \cdot R_0$
$202 = 0{,}90 \cdot 200 + b \cdot 550 \cdot 200$
$202 = 180 + 110000b$
$-110000b = -22$
$b = 0{,}0002$

b. $nMin = 0$
$u(n) = 1{,}38 \cdot u(n-1) - 0{,}002 \cdot u(n-1) \cdot v(n-1)$
$u(nMin) = 550$
$v(n) = 0{,}90 \cdot v(n-1) + 0{,}0002 \cdot u(n-1) \cdot v(n-1)$
$v(nMin) = 200$
kijk in de tabel, dan is R_t maximaal voor $t = 4$ met $R_{\max} = 205$

c. $P_t = P_{t-1} + (0{,}38 - 0{,}002R_{t-1}) \cdot P_{t-1}$
in de evenwichtssituatie geldt:
$0{,}38 - 0{,}002\overline{R} = 0$
$-0{,}002\overline{R} = -0{,}38$
$\overline{R} = 190$
$R_t = R_{t-1} + (-0{,}10 + 0{,}0002P_{t-1}) \cdot R_{t-1}$
in de evenwichtssituatie geldt:
$-0{,}10 + 0{,}0002\overline{P} = 0$
$0{,}0002\overline{P} = 0{,}1$
$\overline{P} = 500$
dus $\overline{P} = 500$ en $\overline{R} = 190$

d. stel de vruchtbaarheid van de prooidieren neemt toe zodat de groeivoet 0,4 wordt.
dan geldt:
$P_t = P_{t-1} + (0{,}40 - 0{,}002R_{t-1}) \cdot P_{t-1}$
in de evenwichtssituatie geldt:
$0{,}40 - 0{,}002\overline{R} = 0$
$-0{,}002\overline{R} = -0{,}40$
$\overline{R} = 200$
dus als de vruchtbaarheid van de prooidieren toeneemt dan blijft $\overline{P}$ gelijk maar $\overline{R}$ neemt toe

Opgave 65:

$P_t = 1{,}18 \cdot P_{t-1} + a \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1}$
$P_t = P_{t-1} + (0{,}18 + a \cdot R_{t-1}) \cdot P_{t-1}$
in de evenwichtssituatie geldt:
$0{,}18 + a \cdot \overline{R} = 0$

$0{,}18 + a \cdot 800 = 0$
$800a = -0{,}18$
$a = -0{,}000225$
$R_t = 0{,}92 \cdot R_{t-1} + b \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
$R_t = R_{t-1} + (-0{,}08 + b \cdot P_{t-1}) \cdot R_{t-1}$
in de evenwichtssituatie geldt:
$-0{,}08 + b \cdot \overline{P} = 0$
$-0{,}08 + b \cdot 5000 = 0$
$5000b = 0{,}08$
$b = 0{,}000016$

Opgave 66:

a. als de prooidieren en roofdieren elkaar niet beïnvloeden neemt het aantal roofdieren af, dus $0 < c < 1$

b. als de prooidieren en roofdieren elkaar niet beïnvloeden neemt het aantal prooidieren toe, dus $a > 1$
als de prooidieren en roofdieren elkaar wel beïnvloeden zal P_t kleiner zijn dan $a \cdot P_{t-1}$ dus $b < 0$ en zal R_t groter zijn dan $c \cdot R_{t-1}$ dus $d > 0$

c. $P_t = a \cdot P_{t-1} + b \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
$P_t = P_{t-1} + a \cdot P_{t-1} - P_{t-1} + b \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
$P_t = P_{t-1} + (a - 1 + b \cdot R_{t-1}) \cdot P_{t-1}$
in de evenwichtssituatie geldt:
$a - 1 + b \cdot \overline{R} = 0$
$b \cdot \overline{R} = 1 - a$
$\overline{R} = \dfrac{1-a}{b}$
$R_t = c \cdot R_{t-1} + d \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
$R_t = R_{t-1} + c \cdot R_{t-1} - R_{t-1} + d \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
$R_t = R_{t-1} + (c - 1 + d \cdot P_{t-1}) \cdot R_{t-1}$
in de evenwichtssituatie geldt:
$c - 1 + d \cdot \overline{P} = 0$
$d \cdot \overline{P} = 1 - c$
$\overline{P} = \dfrac{1-c}{d}$
dus $\overline{P} = \dfrac{1-c}{d}$ en $\overline{R} = \dfrac{1-a}{b}$

d. als de vruchtbaarheid van de prooidieren verandert, dan verandert het getal a
als a verandert, dan verandert $\overline{R}$, maar omdat $\overline{P}$ onafhankelijk is van a zal $\overline{P}$ niet veranderen

Opgave 67:

$\Delta G < 0$ want door de griep zijn er steeds minder mensen gezond dus het aantal gezonde mensen neemt af.
$\Delta I > 0$ want steeds meer mensen zullen immuun worden voor de griep.

$\Delta G + \Delta Z + \Delta I = 0$ want op ieder moment t geldt $G_t + Z_t + I_t = 2000$

Opgave 68:

a. $\Delta G + \Delta Z + \Delta I = 0$

dus $\Delta Z = -\Delta G - \Delta I$

$\Delta G = G_t - G_{t-1} = -0{,}00018 G_{t-1} \cdot Z_{t-1}$

$\Delta I = 0{,}15 Z_{t-1}$

$\Delta Z = -\Delta G - \Delta I = 0{,}00018 G_{t-1} \cdot Z_{t-1} - 0{,}15 Z_{t-1}$

$Z_t - Z_{t-1} = 0{,}00018 G_{t-1} \cdot Z_{t-1} - 0{,}15 Z_{t-1}$

$Z_t = Z_{t-1} + 0{,}00018 G_{t-1} \cdot Z_{t-1} - 0{,}15 Z_{t-1}$

b. als er één gezonde inwoner is en één inwoner met griep, dan is de kans dat een gezonde inwoner griep krijgt van de inwoner met griep gelijk aan 0,00018

c. $G_1 = G_0 - 0{,}00018 G_0 \cdot Z_0 = 1900 - 0{,}00018 \cdot 1900 \cdot 100 = 1866$

$Z_1 = Z_0 + 0{,}00018 G_0 \cdot Z_0 - 0{,}15 Z_0 = 100 + 0{,}00018 \cdot 1900 \cdot 100 - 0{,}15 \cdot 100 = 119$

$I_1 = 2000 - G_1 - Z_1 = 2000 - 1866 - 119 = 15$

$G_2 = G_1 - 0{,}00018 G_1 \cdot Z_1 = 1866 - 0{,}00018 \cdot 1866 \cdot 119 = 1826$

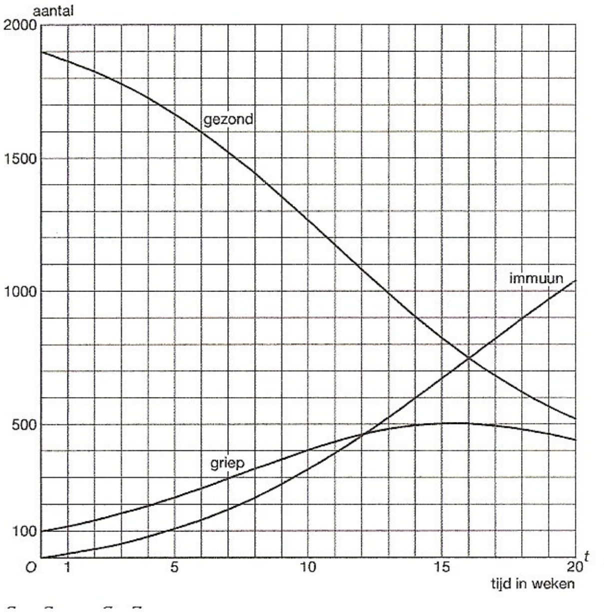
$Z_2 = Z_1 + 0{,}00018 G_1 \cdot Z_1 - 0{,}15 Z_1 = 199 + 0{,}00018 \cdot 1866 \cdot 119 - 0{,}15 \cdot 119 = 141$

$I_2 = 2000 - G_2 - Z_2 = 2000 - 1826 - 141 = 33$

d. $G_{11} = G_{10} - 0{,}00018 G_{10} \cdot Z_{10} = 1265 - 0{,}00018 \cdot 1265 \cdot 404 = 1173$

$Z_{11} = Z_{10} + 0{,}00018 G_{10} \cdot Z_{10} - 0{,}15 Z_{10} = 404 + 0{,}00018 \cdot 1265 \cdot 404 - 0{,}15 \cdot 404 = 435$

e.



Opgave 69:

a. $G_1 = G_0 - a \cdot G_0 \cdot Z_0$

$9408 = 9600 - a \cdot 9600 \cdot 400$

$-192 = -3840000 \cdot a$

$a = 0{,}00005$

$Z_1 = Z_0 + a \cdot G_0 \cdot Z_0 - b \cdot Z_0$

$560 = 400 + 0{,}00005 \cdot 9600 \cdot 400 - b \cdot 400$

$160 = 192 - 400 \cdot b$

$400b = 32$
$b = 0{,}08$

b. de tweede dag is van $t = 1$ tot $t = 2$
$G_1 = 9408$ en $Z_1 = 560$
$G_2 = G_1 - 0{,}00005 \cdot G_1 \cdot Z_1$
$G_2 = 9408 - 0{,}00005 \cdot 9408 \cdot 560 = 9145$
$G_1 - G_2 = 9408 - 9145 = 263$

Opgave 70:

a. $Z_t = Z_{t-1} + 0{,}0001 \cdot G_{t-1} \cdot Z_{t-1} - 0{,}20 \cdot Z_{t-1}$

b. $G_1 = G_0 - 0{,}0001 \cdot G_0 \cdot Z_0$
$G_0 - 0{,}0001 \cdot G_0 \cdot Z_0 = 9216 \qquad (1)$
$G_0 + Z_0 + I_0 = 10000$
$G_0 + Z_0 + 0 = 10000$
$Z_0 = 10000 - G_0$ invullen in (1) geeft:
$G_0 - 0{,}0001 \cdot G_0 \cdot (10000 - G_0) = 9216$
$G_0 - G_0 + 0{,}0001 G_0^{\ 2} = 9216$
$G_0^{\ 2} = 92160000$
$G_0 = 9600$
$Z_0 = 10000 - G_0 = 10000 - 9600 = 400$

Opgave 71:

a. 0,8: 80% van de plattelandsbevolking woont ook het volgend jaar op het platteland
0,04: 4% van de stadsbevolking woont het volgend jaar op het platteland
0,2: 20% van de plattelandsbevolking woont het volgend jaar in de stad
0,96: 96% van de stadsbevolking woont ook het volgend jaar in de stad

b. $0{,}8 + 0{,}2 = 1$ dus de hele plattelandsbevolking woont een jaar later op het platteland (0,8) of in de stad (0,2)
$0{,}96 + 0{,}04 = 1$ dus de hele stadsbevolking woont een jaar later in de stad (0,96) of op het platteland (0,04)
Er komen dus geen inwoners bij en er gaan ook geen inwoners weg, dus is er sprake van een gesloten systeem.

Opgave 72:

a. $0{,}2 + 0{,}8 = 1$ en $0{,}7 + 0{,}3 = 1$

b. het eerste systeem is niet gesloten want $0{,}4 + 0{,}8 \neq 1$ en $0{,}6 + 0{,}2 \neq 1$
het tweede systeem is wel gesloten want $0{,}1 + 0{,}9 = 1$ en $0{,}3 + 0{,}7 = 1$

c. $x_t + y_t \neq x_{t-1} + y_{t-1}$ voor iedere waarde van t

d. er treedt convergentie op, a_t convergeert naar 24 en b_t convergeert naar 24

Opgave 73:

a. er is sprake van een gesloten systeem
$A_{t-1} + B_{t-1} = 600$

$B_{t-1} = 600 - A_{t-1}$

$A_t = 0{,}9 \cdot A_{t-1} + 0{,}3 \cdot B_{t-1}$

$A_t = 0{,}9 \cdot A_{t-1} + 0{,}3 \cdot (600 - A_{t-1})$

$A_t = 0{,}9 \cdot A_{t-1} + 180 - 0{,}3 \cdot A_{t-1}$

$A_t = 0{,}6 \cdot A_{t-1} + 180$

$\overline{A} = \dfrac{180}{1 - 0{,}6} = 450$

$A_t = \overline{A} + 0{,}6^t \cdot (A_0 - \overline{A})$

$A_t = 450 + 0{,}6^t \cdot (350 - 450)$

$A_t = 450 - 100 \cdot 0{,}6^t$

$B_t = 600 - A_t$

$B_t = 600 - (450 - 100 \cdot 0{,}6^t)$

$B_t = 600 - 450 + 100 \cdot 0{,}6^t$

$B_t = 150 + 100 \cdot 0{,}6^t$

b. ja, A_t convergeert naar 450 en B_t convergeert naar 150

Opgave 74:

a. er is sprake van een gesloten systeem

$y_{t-1} + x_{t-1} = 20$

$y_{t-1} = 20 - x_{t-1}$

$x_t = 0{,}25x_{t-1} + 0{,}5 \cdot (20 - x_{t-1})$

$x_t = 0{,}25 + 10 - 0{,}5x_{t-1}$

$x_t = -0{,}25x_{t-1} + 10$ met $x_0 = 4$

$\overline{x} = \dfrac{10}{1 - -0{,}25} = 8$

$x_t = \overline{x} + a^t \cdot (x_0 - \overline{x})$

$x_t = 8 + (-0{,}25)^t \cdot (4 - 8)$

$x_t = 8 - 4 \cdot (-0{,}25)^t$

$y_t = 20 - x_t$

$y_t = 20 - (8 - 4 \cdot (-0{,}25)^t)$

$y_t = 12 + 4 \cdot (-0{,}25)^t$

b. voer in: $y_1 = 8 - 4 \cdot (-0{,}25)^x$ en kijk in de tabel

voor $x = 4$ geldt: $y_1 = 7{,}9844$

voor $x = 5$ geldt: $y_1 = 8{,}0039$

dus vanaf $t = 5$

Opgave 75:

a. $N_t = 0{,}6N_{t-1} + 0{,}2R_{t-1}$

$R_t = 0{,}8R_{t-1} + 0{,}4N_{t-1}$ met $N(0) = 0{,}8$ en $R(0) = 1{,}2$

b. er is sprake van een gesloten systeem

$N_{t-1} + R_{t-1} = 2$
$R_{t-1} = 2 - N_{t-1}$
$N_t = 0{,}6N_{t-1} + 0{,}2 \cdot (2 - N_{t-1})$
$N_t = 0{,}6N_{t-1} + 0{,}4 - 0{,}2N_{t-1}$
$N_t = 0{,}4N_{t-1} + 0{,}4$ met $N(0) = 0{,}8$
$\overline{N} = \dfrac{0{,}8}{1 - 0{,}4} = \frac{2}{3}$
$N_t = \overline{N} + a^t \cdot (N_0 - \overline{N})$
$N_t = \frac{2}{3} + 0{,}4^t \cdot (0{,}8 - \frac{2}{3})$
$N_t = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} \cdot 0{,}4^t$
$R_t = 2 - N_t = 2 - (\frac{2}{3} + \frac{2}{15} \cdot 0{,}4^t)$
$N_t = 1\frac{1}{3} - \frac{2}{15} \cdot 0{,}4^t$

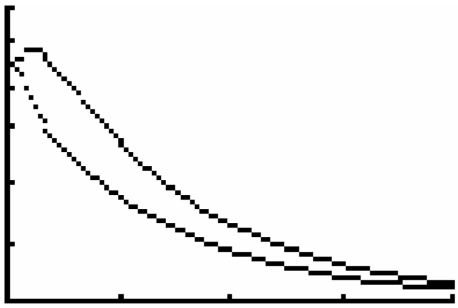
c. voor grote waarden van *t* geldt: $N_t \to \frac{2}{3} + \frac{2}{15} \cdot 0 = \frac{2}{3}$
dus $\frac{2}{3}$ miljoen

Opgave 76:

a. $J(t) = J(t-1) - 0{,}1J(t-1) - 0{,}06J(t-1) + 0{,}2V(t-1)$
$J(t) = 0{,}84J(t-1) + 0{,}2V(t-1)$ met $J(0) = 800$

b. $V_t = 0{,}88V(t-1) + 0{,}06J(t-1)$ met $V(0) = 1200$

c. er is geen sprake van een gesloten systeem

d. 

e. kijk in de tabel
voor $t = 43$ geldt $J(43) = 403$ en $V(43) = 265$
voor $t = 44$ geldt $J(44) = 391$ en $V(44) = 257$
dus vanaf $t = 44$

7.6 Diagnostische toets

Opgave 1:

a. $u_6 = 402$

$u_7 = 409$

b. $u_{13} = 409{,}88$

$u_{14} = 409{,}91$ dus vanaf de 15e term

c. $g = 409{,}939$

Opgave 2:

a. $u_0 = 1 \quad u_1 = 4 \quad u_2 = 20 \quad u_3 = 87 \quad u_4 = 325 \quad u_5 = 1100$

b. $u_{11} = 906887$

$u_{12} = 2722389$ dus vanaf $n = 12$

Opgave 3:

a. $u_n = 1{,}045 \cdot u_{n-1} - 500$ met $u_0 = 6000$

b. $u_{12} = 2443{,}27$ dus € 2443,27

c. $u_{17} = 309{,}41$

$u_{18} = -176{,}67$

dus $18 \cdot 500 - 176{,}67 = 8823{,}33$

Opgave 4:

a. rekenkundige rij met $u_0 = 25$ en $v = 7$

recursieve formule: $u_n = u_{n-1} + 7$ met $u_0 = 25$

directe formule: $u_n = 25 + 7n$

b. $25 + 7n = 130$

$7n = 105$

$n = 15$ dus de 16e term

Opgave 5:

a. rekenkundige rij dus

$S_{25} = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot (u_0 + u_{25}) = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot (-5 + 195) = 2470$

b. $S_{29} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (u_0 + u_{29}) = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (-5 + 227) = 3330$

Opgave 6:

a. rekenkundige rij met $u_0 = 18$ en $v = 12$

$u_n = 18 + 12n$

$18 + 12n = 150$

$12n = 132$

$n = 11$

$S_{11} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (18 + 150) = 1008$

b. rekenkundige rij met $u_0 = 180$ en $v = -8$

$u_n = 180 - 8n$

$180 - 8n = 100$

$-8n = -80$
$n = 10$
$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot (180 + 100) = 1540$

Opgave 7:

a. meetkundige rij met $u_0 = 800$ en $r = 1{,}25$
recursieve formule: $u_n = 1{,}25 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 800$
directe formule: $u_n = 800 \cdot 1{,}25^n$

b. $u_{14} = 18190$
$u_{15} = 22737$ dus vanaf de 16e term

Opgave 8:

a. $S_{10} = \dfrac{u_0 - u_{11}}{1-r} = \dfrac{100 - 100 \cdot 1{,}08^{11}}{1 - 1{,}08} = 1664{,}55$

b. $S_{14} = \dfrac{u_0 - u_{15}}{1-r} = \dfrac{100 - 100 \cdot 1{,}08^{15}}{1 - 1{,}08} = 2715{,}21$

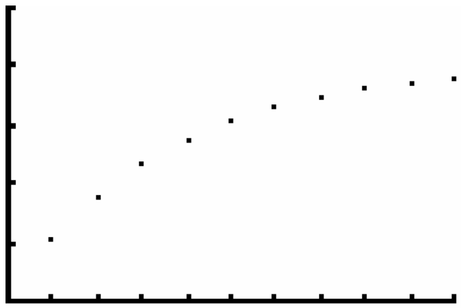
Opgave 9:

a. rekenkundige rij met $u_0 = 5$ en $r = 4$
$5 + 20 + 80 + 320 + ... + 1310720 = \dfrac{5 - 4 \cdot 13010720}{1-4} = 1747625$

b. $1{,}15 + 1{,}15^2 + 1{,}15^3 + ... + 1{,}15^{20} = \dfrac{1{,}15 - 1{,}15^{21}}{1 - 1{,}15} = 117{,}810$

Opgave 10:

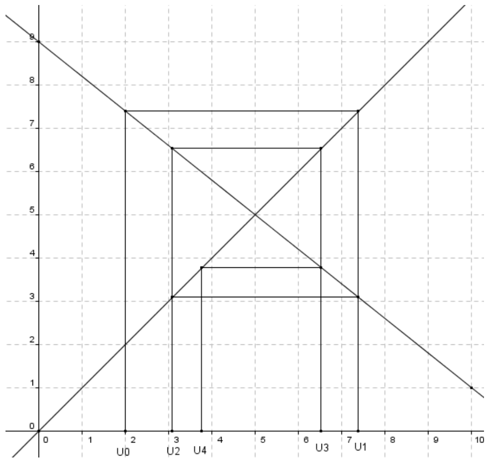
a.



b. ja
$g = 0{,}75g + 100$
$0{,}25g = 100$
$g = 400$
dus de grenswaarde is 400

Opgave 11:

a.



b. de termen komen steeds dichter bij het snijpunt van beide lijnen te liggen

$x = -0{,}8x + 9$

$1{,}8x = 9$

$x = 5$ dus de grenswaarde is 5

Opgave 12:

a. $\bar{u} = \dfrac{-10}{1 - 1{,}25} = 40$

$u_n = 40 + 1{,}25^n \cdot (20 - 40)$

$u_n = 40 - 20 \cdot 1{,}25^n$

b. $\bar{P} = \dfrac{1000}{1 - 0{,}95} = 20000$

$P_n = 20000 + 0{,}95^n \cdot (25000 - 20000)$

$P_n = 20000 + 5000 \cdot 0{,}95^n$

Opgave 13:

a. $Z_t = 0{,}8Z_{t-1} + 16$ met $Z_0 = 100$

b. $\bar{Z} = \dfrac{16}{1 - 0{,}8} = 80$

$Z_t = 80 + 0{,}8^t \cdot (100 - 80)$

$Z_t = 80 + 20 \cdot 0{,}8^t$

c. $Z_5 = 80 + 20 \cdot 0{,}8^5 = 86{,}6$ kg

d. de grenswaarde is 80

$y_1 = 80 + 20 \cdot 0{,}8^x$ en $y_2 = 80{,}5$

intersect geeft $x = 16{,}5$ dus na 17 uur

Opgave 14:

a. $P_1 = 1455$

$P_5 = 1305$

b. kijk in de grafiek, het aantal prooidieren is voor het eerst maximaal na 43 maanden

$P_{43} = 2203$

c. $P_t = 1{,}15P_{t-1} - 0{,}001R_{t-1}P_{t-1}$

$P_t = P_{t-1} + 0{,}15P_{t-1} - 0{,}001R_{t-1}P_{t-1}$

$P_t = P_{t-1} + (0{,}15 - 0{,}001R_{t-1})P_{t-1}$

in de evenwichtssituatie geldt:

$0{,}15 - 0{,}001\overline{R} = 0$

$-0{,}001\overline{R} = -0{,}15$

$\overline{R} = 150$

$R_t = 0{,}92R_{t-1} + 0{,}00005P_{t-1}R_{t-1}$

$R_t = R_{t-1} - 0{,}08R_{t-1} + 0{,}00005P_{t-1}R_{t-1}$

$R_t = R_{t-1} + (-0{,}08 + 0{,}00005P_{t-1})R_{t-1}$

in de evenwichtssituatie geldt:

$-0{,}08 + 0{,}00005\overline{P} = 0$

$0{,}00005\overline{P} = 0{,}08$

$\overline{P} = 1600$

Opgave 15:

a. $G_1 = G_0 - 0{,}00001 \cdot G_0 \cdot Z_0 = 14500 - 0{,}000001 \cdot 14500 \cdot 500 = 14428$

$Z_1 = Z_0 + 0{,}00001 \cdot G_0 \cdot Z_0 - 0{,}05 \cdot Z_0$

$Z_1 = 500 + 0{,}00001 \cdot 14500 \cdot 500 - 0{,}05 \cdot 500 = 548$

$I_1 = 15000 - G_1 - Z_1 = 15000 - 14428 - 548 = 24$

b. de derde dag is van $n = 2$ tot $n = 3$

$G_2 = 14349$ en $G_3 = 14263$

dus $14349 - 14263 = 86$

Opgave 16:

er is sprake van een gesloten systeem

$x_{t-1} + y_{t-1} = 60$

$y_{t-1} = 60 - x_{t-1}$

$x_t = 0{,}15x_{t-1} + 0{,}65y_{t-1}$

$x_t = 0{,}15x_{t-1} + 0{,}65 \cdot (60 - x_{t-1})$

$x_t = 0{,}15x_{t-1} + 39 - 0{,}65x_{t-1}$

$x_t = -0{,}5x_{t-1} + 39$ met $x_0 = 20$

$$\overline{x} = \frac{39}{1 - -0{,}5} = 26$$

$x_t = 26 + (-0{,}5)^t \cdot (20 - 26)$

$x_t = 26 - 6 \cdot (-0{,}5)^t$

$y_t = 60 - x_t$

$y_t = 60 - (26 - 6 \cdot (-0{,}5)^t)$

$y_t = 34 + 6 \cdot (-0{,}5)^t$